Mikroekonomia II

Narzędzia matematyczne

1 Pochodne:

1. Funkcja stała $f(x) = b$:

$$f'(x) = 0$$

Przykład:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

2. Funkcja wykładnicza $f(x) = x^a$:

$$f'(x) = ax^{a-1} = ax^{a-1}$$

Przykład:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3. Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

4. Stała razy funkcja $bf(x)$

$$\frac{d(bf(x))}{dx} = bf'(x)$$

Przykład:

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^{\frac{1}{3}} \\ f'(x) &= 6 \cdot \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 2x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

5. Suma funkcji $f(x) + g(x)$

$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

Przykład:

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^3 + 2x^2 + 4\ln x - 2x^{\frac{1}{4}} \\ f'(x) &= 3 \cdot 12x^{3-1} + 2 \cdot x^{2-1} + 4 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} \\ f'(x) &= 36x^2 + 2x + 4\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

6. Iloczyn funkcji $f(x) \cdot g(x)$

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

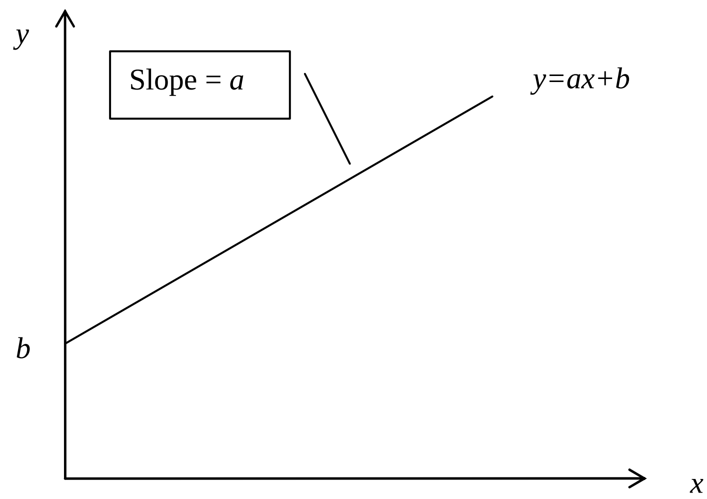
Przykład:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3\log x)(6x^{\frac{1}{3}} - 2x^3) \\ f'(x) &= (2 \cdot x^{2-1} + 3\frac{1}{x})(6x^{\frac{1}{3}} - 2x^3) + (2x^2 + 3\log x)(6 \cdot \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 2 \cdot 3x^{3-1}) \\ &= (2x + \frac{3}{x})(6x^{\frac{1}{3}} - 2x^3) + (2x^2 + 3\log x)(2x^{-\frac{2}{3}} - 6x^2) \end{aligned}$$

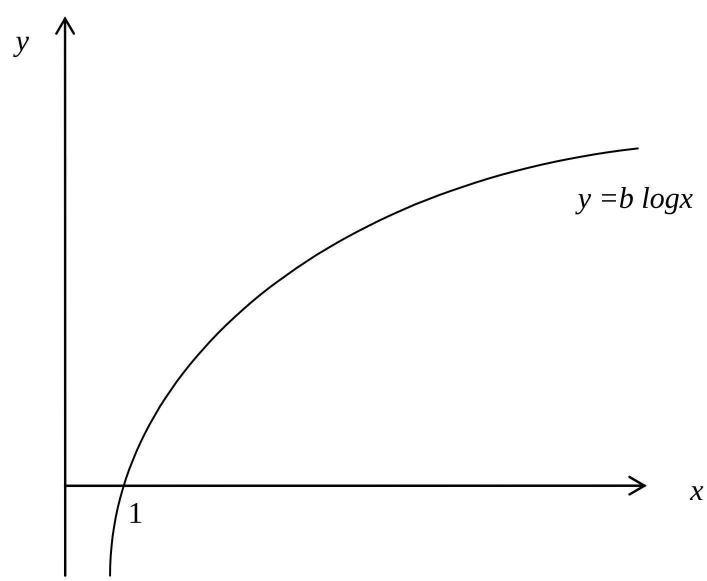
2 Rysowanie wykresów:

Znajomość kształtu wykresów następujących funkcji może okazać się pomocna:

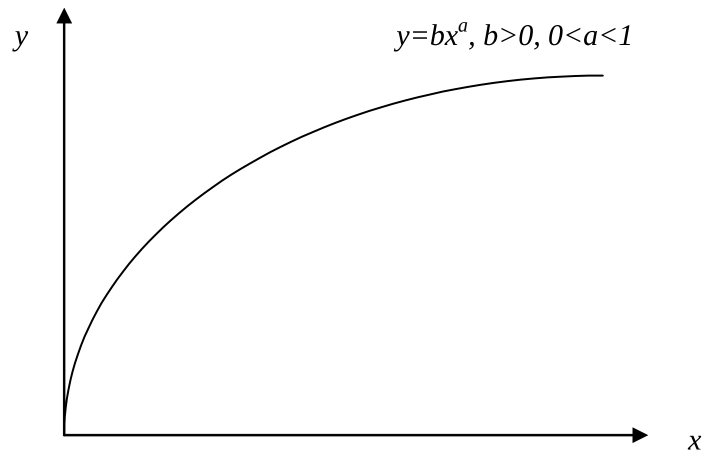
1. $f(x) = b + ax$



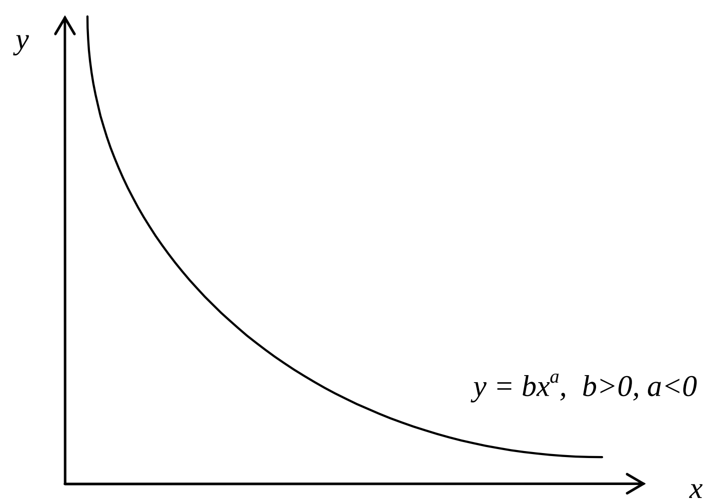
2. $f(x) = b \log x$



3. $f(x) = bx^a$ dla $b > 0$, $a \in (0, 1)$



4. $f(x) = bx^a$ dla $b > 0$, $a < 0$.
   Zauważ, że powyższą funkcję można też zapisać jako $f(x) = \frac{b}{x^c}$, gdzie $c = -a > 0$



3 Pochodne funkcji wielu zmiennych:

Funkcje typu $f(x, y)$. Wówczas można policzyć pochodne cząstkowe względem zarówno zmiennej x jak i y. Pochodne liczy się bardzo podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmienny. Podczas liczenia pochodnej cząstkowej po zmiennej x traktuje się zmienną y jako stałą. Podobnie podczas liczenia pochodnej cząstkowej po zmiennej y, zmienną x traktuje się jako stałą. Pochodną cząstkową po x oznaczamy jako $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ lub $f_1(x, y)$ lub $f_x(x, y)$. Pochodną cząstkową po y oznaczamy jako $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ lub $f_2(x, y)$ lub $f_y(x, y)$.

1. Rozważmy funkcję typu $f(x, y) = a \log x + b \log y$. Pochodne cząstkowe mają następującą postać:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= a\frac{1}{x} + 0 = \frac{a}{x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 + b\frac{1}{y} = \frac{b}{y} \end{aligned}$$

   Przykład:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 5\log x + 4\log y \\ f_x(x,y) &= 5 \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{5}{x} \\ f_y(x,y) &= 0 + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{y} \end{aligned}$$

2. Funkcja typu Cobba-Douglasa $f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= Ay^{\beta} \cdot \alpha x^{\alpha-1} = A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} \\ f_y(x,y) &= Ax^{\alpha} \cdot \beta y^{\beta-1} = A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1} \end{aligned}$$

   Przykład:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 5x^{0.3}y^{0.7} \\ f_x(x,y) &= 5y^{0.7} \cdot 0.3x^{0.3-1} = 1.5y^{0.7}x^{-0.7} = 1.5\left(\frac{y}{x}\right)^{0.7} \\ f_y(x,y) &= 5x^{0.3} \cdot 0.7y^{0.7-1} = 3.5x^{0.3}y^{-0.3} = 3.5\left(\frac{x}{y}\right)^{0.3} \end{aligned}$$

4 Metoda mnożników Lagrange'a

Metoda ta jest wykorzystywana do rozwiązania problemów typu:

$$\max_{(x,y)} u(x,y)$$
$$\text{p.w. } p_x x + p_y y = m$$

Zauważ, że p_x, p_y, m są dane. Aby rozwiązać ten problem stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Stosujemy wówczas następujący algorytm:
<u>Krok 1:</u> Konstruujemy funkcję Lagrange'a. Robimy to w następujący sposób najpierw kopiujemy funkcję celu (w naszym przypadku $u(x, y)$), następnie piszemy "$-\lambda$" i otwieramy nawias kwadratowy. W nawiasie wpisujemy lewą stronę równania, które otrzymujemy po przyniesieniu wszystkich elementów ograniczenia na lewą stronę, tak aby po prawej stronie pojawiło się 0 (w naszym przypadku $p_x x + p_y y - m = 0$). Następnie zamykamy nawias kwadratowy. Zatem funkcja Lagrange'a wygląda tak:

$$L = u(x,y) - \lambda\left[p_x x + p_y y - m\right]$$

<u>Krok 2:</u> Liczmy warunki pierwszego rzędu. Aby znaleźć warunki pierwszego rzędu korzystamy z poniższych równań

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases}$$

co po przeliczeniu daje:

$$\begin{cases} u_x(x,y) - \lambda p_x = 0 \\ u_y(x,y) - \lambda p_y = 0 \\ p_x x + p_y y - m = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy trzy równania z trzema niewiadomymi λ, y, x.
Krok 3: Eliminujemy λ. Z powyższych równań otrzymujemy

$$\begin{cases} u_x(x,y) = \lambda p_x \\ u_y(x,y) = \lambda p_y \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

Dzieląc dwa pierwsze równania stronami otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{u_x(x,y)}{u_y(x,y)} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

Czyli otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi. Z ogólną postacią funkcji dalej nic się nie da policzyć, w przykładzie poniżej pokazane są wszystkie wyliczenia dla funkcji użyteczności Cobba-Douglasa.

Przykład 1 *Rozważmy następujący problem:*

$$\max_{(x,y)} 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

$$p.w.\ p_x x + p_y y = m$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda\left[p_x x + p_y y - m\right]$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} L_x = 3 \cdot \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} \cdot y^{\frac{1}{4}} - \lambda p_x = 0 \\ L_y = 3x^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4}y^{\frac{1}{4}-1} - \lambda p_y = 0 \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

Przekształcając:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \lambda p_x \\ \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} = \lambda p_y \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

Dzieląc dwa pierwsze równania stronami otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

Upraszczając

$$\begin{cases} p_x x = p_y y \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

i podstawiając do ograniczenia budżetowego

$$\begin{aligned} p_y y + p_y y &= m \\ y &= \frac{m}{2p_y} \end{aligned}$$

I podstawiając do równania $p_x x = p_y y$ otrzymujemy x:

$$x = \frac{p_y}{p_x}y = \frac{p_y}{p_x}\frac{m}{2p_y} = \frac{m}{2p_x}$$

Rozwiązanie problemu:

$$\begin{cases} x = \frac{m}{2p_x} \\ y = \frac{m}{2p_y} \end{cases}$$