Mikroekonomia II
Ćwiczenia 6

Jacek Suda

Minimalizacja kosztów

1. (na wykładzie) Firma genealogiczna "Korzenie" produkuje dobro y korzystając z jednego nakładu x używając funkcji produkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Ile jednostek x jest potrzebnych do wyprodukowania y jednostek produktu. Jeżeli $w = 10$ ile będzie kosztowało wyprodukowanie 10 jednostek produkcji?

   Odpowiedź:
   Ponieważ
   $$y = \sqrt{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x = y^2,$$
   do wyprodukowania y jedenostek produktu potrzeba x^2 jednostek nakładu. Jeżeli $w = 10$ to koszt wyprodukowania 10 jednostek wyniesie
   $$c(y) = w \cdot y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad c(10) = 10 \cdot 10^2 = 1000.$$

   (b) Ile jednostek x jest potrzebnych do wyprodukowania y jednostek produktu. Jeżeli $w = 10$ ile będzie kosztowało wyprodukowanie y jednostek produkcji?

   Odpowiedź:
   Jeżeli $w = 10$ to koszt wyprodukowania y jednostek wyniesie
   $$c(y) = 10 \cdot y^2.$$

   (c) Znajdź funkcję kosztów $c(y)$.

   Odpowiedź:
   Funkcja kosztu
   $$c(y) = w \cdot y^2.$$

   (d) Znajdź koszt przeciętny $AC(y) = \frac{c(y)}{y}$. Jakie korzyści skali cechują funkcję produkcji $f(x)$?

   Odpowiedź:
   Koszt przeciętny
   $$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{w \cdot y^2}{y} = w \cdot y.$$
   Korzyści skali funkcji f:
   $$f(tx) = \sqrt{tx} = t^{1/2}\sqrt{x} = t^{1/2} f(x)$$
   Funkcja produkcji cechuje się malejącymi korzyściami skali.

2. Przedsiębiorca przy wykorzystaniu dwóch czynników produkcji produkuje produkt wykorzystując technologię opisaną następującą funkcją produkcji $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$. Koszt pierwszego czynika wynosi w_1, a koszt drugiego czynnika produkcji w_2.

   (a) Przypuśćmy, że przedsiębiorca chce wyprodukować produkt jak najtaniej. Znajdź formułę na stosunek $\frac{x_1}{x_2}$ w optimum.

   Odpowiedź:
   Problem przedsiębiorcy:
   $$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
   przy warunku
   $$y = f(x_1, x_2).$$
   Funkcja Lagrangea dla tego problemu ma postać
   $$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda \left(x_1^{1/3} x_2^{1/3} - y \right)$$
   Warunki pierwszego rzędzu
   $$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{x_1} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad w_1 = \lambda \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3} = \lambda \frac{y}{x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{x_2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad w_2 = \lambda \frac{1}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3} = \lambda \frac{y}{x_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y = x_1^{1/3} x_2^{1/3} \end{aligned}$$
   Dzieląc pierwsze równianie przez drugie otrzymujemy warunek na stosunek $\frac{x_1}{x_2}$ w optimum
   $$\frac{w_2}{w_1} = \frac{x_1}{x_2}.$$

   (b) Znajdź zatrudnienie maszyn i pracy, które pozwolą w najtańszy możliwy sposób wyprodukować y jednostek produktu (warunkowe funkcje popytu na czynniki).

   Odpowiedź:
   Korzystając z powyższego warunku optimum
   $$w_1 x_1 = w_2 x_2 \qquad \text{lub} \qquad x_2 = \frac{w_1}{w_2} x_1.$$
   Wstawiając to do funkcji produkcji otrzymujemy
   $$\begin{aligned} y &= x_1^{1/3} x_2^{1/3} = x_1^{1/3} \left(\frac{w_1}{w_2} x_1 \right)^{1/3} = x_1^{2/3} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{1/3} \\ x_1 &= y^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1/2} \end{aligned}$$
   co jest warunkową funkcją popytu na x_1
   $$x_1(y, w_1, w_2) = y^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1/2}$$
   Warunkowa funkcja popytu na x_2 to
   $$x_2(y, w_1, w_2) = \frac{w_1}{w_2} x_1 = y^{3/2} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{1/2}.$$

(c) Znajdź funkcję kosztów $c(y)$.

Odpowiedź:
Funkcja kosztu:

$$c(y) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = 2 \cdot w_1 x_1 = 2 \cdot w_1 y^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1/2} = 2 y^{3/2} (w_1 w_2)^{1/2}.$$

3. Boguchwał ma szklarnie w której dogląda tulipanów. Jego sekret, który pozwala mu wyprodukować duże ilości tulipanów jest następujący. Produkcja t tulipanów wymaga dwa razy więcej światła l niż wody o i dana jest funkcją $t = \min\{l, 2o\}$. Koszt wody i światła wynosi odpowiednio w_o i w_l.

   (a) Znajdź warunkowe funkcje popytu na czynniki produkcji, tj. wodę i światło.

   Odpowiedź:
   Aby wyprodukować (jak najtaniej) t tulipanów Boguchwał potrzebuje l jednostek światła i $2o$ jednostek wody. Warunkowy popyt na wodę i światło to

   $$l(t) = t, \qquad o(t) = \frac{t}{2}.$$

   (b) Znajdź funkcję kosztów $c(t)$.

   Odpowiedź:
   Koszt wyprodukowania jednego tulipana to $w_l + 2 \cdot w_o$. Koszt wyprodukowania t tuplianów

   $$c(t) = t\,(w_l + 2w_o)$$

Krzywe kosztów

1. Rosława zamierza otworzyć kwiaciarnię w nowym centrum handlowym. Ma do wyboru trzy różne powierzchnie handlowe: $200m^2$, $500m^2$ i $1000m^2$. Miesięczny czynsz wynosi 1 PLN za m^2. Rosława szacuje, że jeżeli dysponuje powierzchnią Fm^2 i sprzedaje y bukietów kwiatów miesięcznie jej koszt zmienny będzie wynosił $c_v(y) = y^2/F$.

   (a) Zapisz jej AC i MC jeżeli $F = 200$. Jakie y minimalizuje AC? Ile wówczas wynosi AC?

   Odpowiedź:
   Dla powierzchni F całkowity koszt sprzedaży y bukietów kwiatów wynosi

$$c(y) = F + c_v(y) = F + \frac{y^2}{F}$$

   Dla $F = 200$

$$\begin{aligned} c(y) =& 200 + \frac{y^2}{200} \\ AC(y) =& \frac{c(y)}{y} = \frac{200}{y} + \frac{y}{200} \\ MC(y) =& \frac{\partial c(y)}{\partial y} = \frac{y}{100} \end{aligned}$$

   Warunek minimalnego $AC(y)$ to

$$\min_y \frac{200}{y} + \frac{y}{200}$$

   lub $MC(y) = AC(y)$.
   Rozwiązanie problemu minimalizacji to

$$-\frac{200}{y^2} + \frac{1}{200} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = 200^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 200.$$

   Rozwiązanie $AC(y) = MC(y)$ jest dane przez

$$\frac{200}{y} + \frac{y}{200} = \frac{y}{100} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{200}{y} = \frac{y}{200} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 200.$$

   Średni koszt produkcji kwiatów wynosi wtedy

$$AC(200) = \frac{200}{200} + \frac{200}{200} = 2.$$

   (b) Zapisz jej AC i MC jeżeli $F = 500$. Jakie y minimalizuje AC? Ile wynosi AC w tym przypadku?

   Odpowiedź:
   Dla $F = 500$

$$\begin{aligned} c(y) =& 500 + \frac{y^2}{500} \\ AC(y) =& \frac{c(y)}{y} = \frac{500}{y} + \frac{y}{500} \\ MC(y) =& \frac{\partial c(y)}{\partial y} = \frac{y}{250} \end{aligned}$$

Warunek minimalnego $AC(y)$ to

$$\min_y \frac{500}{y} + \frac{y}{500}$$

lub $MC(y) = AC(y)$.
Rozwiązanie problemu minimalizacji to

$$-\frac{500}{y^2} + \frac{1}{500} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = 500^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 500.$$

Rozwiązanie $AC(y) = MC(y)$ jest dane przez

$$\frac{500}{y} + \frac{y}{500} = \frac{y}{250} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{500}{y} = \frac{y}{500} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 500.$$

Średni koszt produkcji kwiatów wynosi wtedy

$$AC(500) = \frac{500}{500} + \frac{500}{500} = 2.$$

(c) Zapisz jej AC i MC dla $F = 1000$. Dla jakiego y AC jest najmniejsze? Ile wynosi AC?

Odpowiedź:
Dla $F = 1000$

$$\begin{aligned} c(y) =& 1000 + \frac{y^2}{1000} \\ AC(y) =& \frac{c(y)}{y} = \frac{1000}{y} + \frac{y}{1000} \\ MC(y) =& \frac{\partial c(y)}{\partial y} = \frac{y}{500} \end{aligned}$$

Warunek minimalnego $AC(y)$ to

$$\min_y \frac{1000}{y} + \frac{y}{1000}$$

lub $MC(y) = AC(y)$.
Rozwiązanie problemu minimalizacji to

$$-\frac{1000}{y^2} + \frac{1}{1000} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = 1000^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1000.$$

Rozwiązanie $AC(y) = MC(y)$ jest dane przez

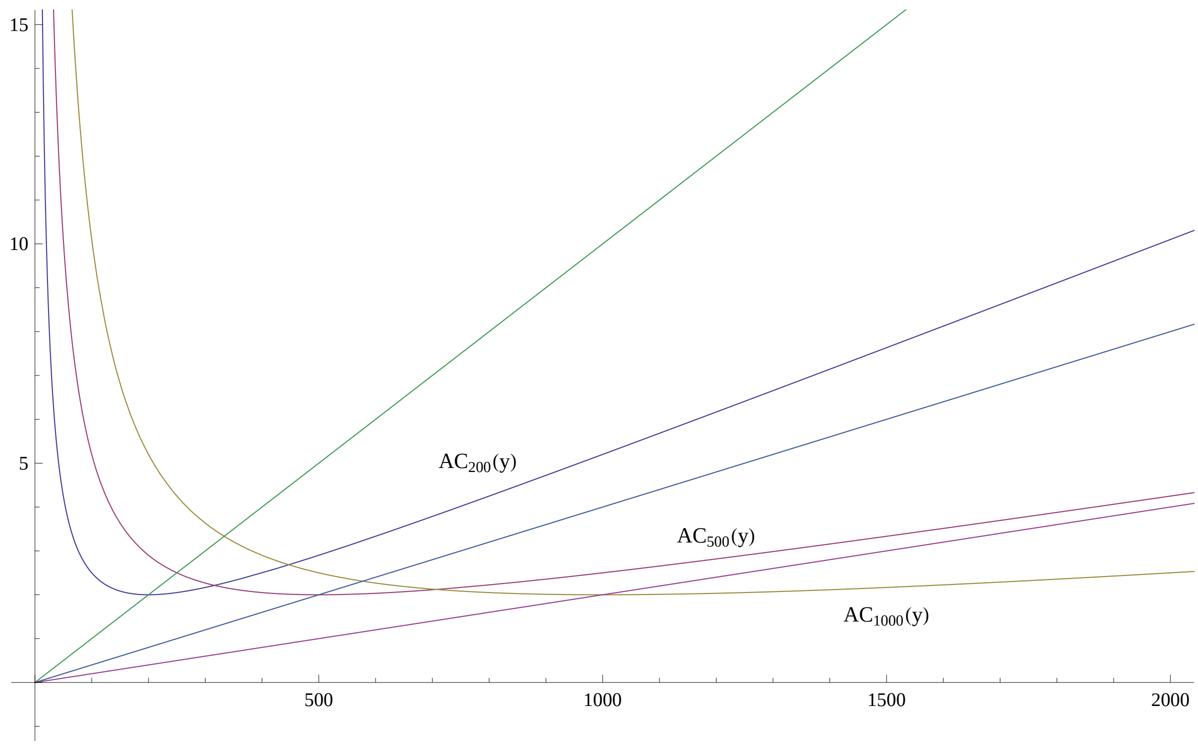
$$\frac{1000}{y} + \frac{y}{1000} = \frac{y}{500} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1000}{y} = \frac{y}{1000} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1000.$$

Średni koszt produkcji kwiatów wynosi wtedy

$$AC(1000) = \frac{1000}{1000} + \frac{1000}{1000} = 2.$$

(d) Narysuj wszystkie krzywe AC i MC na jednym rysunku. Na tym samym rysunku narysuj krzywe $LRAC$ i $LRMC$.

Odpowiedź:



Podaż firmy

1. Mirosława produkuje sakiewki. Jej funkcja kosztów ma postać $c(y) = y^3 - 8y^2 + 30y + 5$.

   (a) Znajdź AC, AVC, i MC.
   Odpowiedź:

   Zauważ, że w naszym przypadku $c(y) = c_v(y) + F$ ma postać

   $$c_v(y) = y^3 - 8y^2 + 30y$$
   $$F = 5.$$

   Wtedy,

   $$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{y^3 - 8y^2 + 30y + 5}{y} = y^2 - 8y + 30 + \frac{5}{y}$$
   $$AVC(y) = \frac{c_v(y)}{y} = \frac{y^3 - 8y^2 + 30y}{y} = y^2 - 8y + 30$$
   $$AFC(y) = \frac{F}{y} = \frac{5}{y}$$
   $$MC(y) = \frac{\partial c(y)}{\partial y} = c'(y) = 3y^2 - 16y + 30$$

   (b) Krótki okres. Jeżeli cena naprawy samochodu wynosi 14 PLN, to ile sakiewek wyprodukuje Mirosława?(*Wskazówka*: $3y^2-16y+16 = (3y-4)(y-4)$)) Ile, jeżeli cena wynosi 9 PLN ? (*Wskazówka*: $3y^2 - 16y + 21 = (3y - 7)(y - 3)$)
   Odpowiedź:

   Warunek maksymalizacji zysku dany jest przez $\max_y\{py - c(y)\}$, który oznacza dla $y > 0$

   $$p = MC(y)$$

   i spełnienie warunku drugiego rzędu $MC'(y) > 0$. Dodatkowo, dla $y > 0$ musi zachodzić $p > AVC(y)$.
   Dla $p = 14$ warunek $p = MC(y)$ możemy zapisać jako

   $$14 = 3y^2 - 16y + 30 \qquad \Longrightarrow \qquad 3y^2 - 16y + 16 = 0.$$

   Zgodnie ze wskazówką,

   $$3y^2 - 16y + 16 = (3y - 4)(y - 4)$$

   co oznacza, że równanie ma dwa rozwiązania: $y = 4/3$ i $y = 4$. Warunek drugiego rzędu, $MC'(y) > 0$, jest spełniony dla

   $$MC'(y) = 6y - 16 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y > \frac{8}{3}$$

   Oznacza, że zysk jest maksymalizowany dla $y = 4$. Ponieważ $AVC(4) = 4^2-8\cdot4+30 = 14 \leqslant 14 = p$, wielkość produkcji sakiewek w wysokości $y = 4$ maksymalizuje zysk Mirosławy (i pokrywa koszt zmienny).

   Dla $p = 9$ warunek $p = MC(y)$ oznacza

   $$9 = 3y^2 - 16y + 30 \qquad \Longrightarrow \qquad 3y^2 - 16y + 21 = 0.$$

Zgodnie ze wskazówką,

$$3y^2 - 16y + 21 = (3y - 7)(y - 3)$$

co oznacza, że równanie ma dwa rozwiązania: $y = 7/3$ i $y = 3$. Warunek drugiego rzędu,

$$MC'(y) = 6y - 16 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y > \frac{8}{3}$$

jest spełniony dla $y = 3$. Ponieważ jednak $AVC(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 30 = 39 - 24 = 15 > 9 = p$, to przy tej cenie przychód z produkcja sakiewek nie pokrywa kostów zmiennych produkcji i Mirosława nie będzie produkować sakiewek.

(c) Długi okres. Jeżeli cena naprawy samochodu wynosi 14 PLN, to ile sakiewek wyprodukuje Mirosława (*Wskazówka*: $3y^2 - 16y + 16 = (3y - 4)(y - 4)$)? Ile, jeżeli cena wynosi 25 PLN ? (*Wskazówka*: $3y^2 - 16y + 5 = (3y - 1)(y - 5)$)

Odpowiedź:
Warunek długookresowej równowagi wymaga, żeby $p \geqslant AC(y)$.
Dla $p = 14$ wiemy, że $y = 4$ maksymalizuje zysk ale generuje stratę, ponieważ

$$AC(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 30 + \frac{5}{4} = 14 + \frac{5}{4} < 14 = p.$$

Dla $p = 14$ Mirosława nie będzie produkować sakiewek w długim okresie.

Dla $p = 25$ warunek $p = MC(y)$ oznacza

$$25 = 3y^2 - 16y + 30 \qquad \Longrightarrow \qquad 3y^2 - 16y + 5 = 0.$$

Zgodnie ze wskazówką,

$$3y^2 - 16y + 5 = (3y - 1)(y - 5)$$

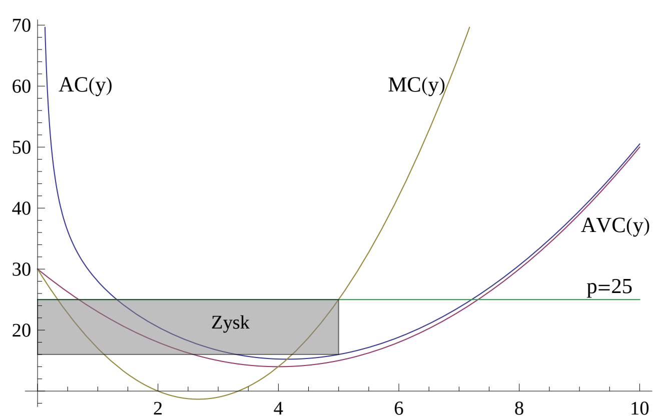
co oznacza, że równanie ma dwa rozwiązania: $y = 1/3$ i $y = 5$. Warunek drugiego rzędu,

$$MC'(y) = 6y - 16 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y > \frac{8}{3}$$

jest spełniony tylko dla $y = 5$. Ponieważ jednak $AC(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 30 = 55 - 40 = 15 < 25 = p$, to przy tej cenie produkcja maksymalizująca zysk $y = 5$ przynosi Mirosławie zysk.

(d) Przypuśćmy, że $p = 25$. Narysuj na rysunku p, AC, AVC i MC a następnie pokaż zysk Mirosławy.

Odpowiedź:



(e) Znajdź i pokaż na rysunku krzywą podaży Mirosławy w krótkim okresie.

(f) Znajdź i pokaż na rysunku krzywą podaży Mirosławy w długim okresie. (*Wskazówka*: $2y^3 - 8y^2 - 5 = 0$ dla $y \approx 4,146$.)

Podaż gałęzi

1. Znajdź rynkowe krzywe podaży w następujących przypadkach:

   (a) $S_1(p) = p$, $S_2(p) = 2p$, $S_3(p) = 3p$,

   Odpowiedź:

$$S(p) = \sum_{i=1}^{3} S_i(p) = 6p$$

   (b) $S_1(p) = 2p$, $S_2(p) = p - 1$.

   Odpowiedź:

$$S(p) = \sum_{i=1}^{2} S_i(p) = \begin{cases} 2p & \text{dla} \quad 0 \leqslant p < 1, \\ 3p - 1 & \text{dla} \quad p \geqslant 1, \end{cases}$$

Monopol

1. Monopolista napotyka na odwróconą funkcję popytu $p(y) = 12 - y$, a krzywa kosztów jest dana za pomocą $c(y) = y^2$.

   (a) Jaka będzie wielkość produkcji, jeżeli monopolista maksymalizuje zysk?

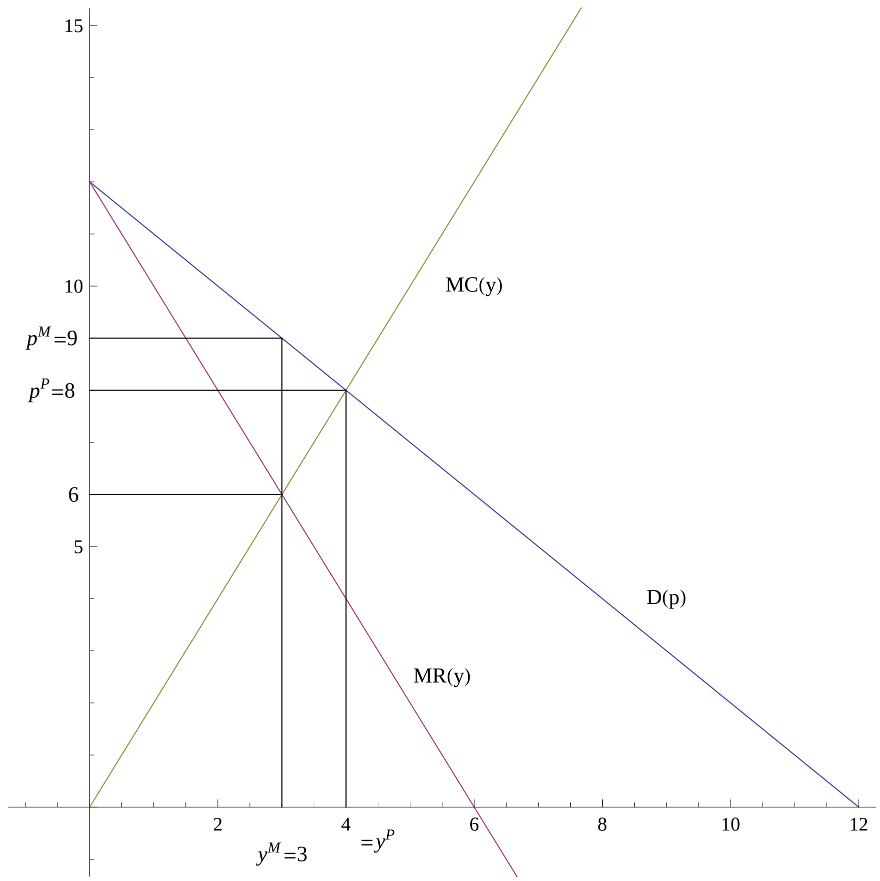
   Odpowiedź:
   Monopolista maksymalizuje zysk
   $$\max_y p(y) \cdot y - c(y)$$
   czyli
   $$max_y 12y - y^2 - y^2.$$
   Warunek pierwszego rzędy to $MR(y) = MC(y)$
   $$12 - 2y = 2y \qquad \Longrightarrow \qquad yM = 3.$$

   (b) Jaka wielkość produkcji jest efektywna w sensie Pareto?

   Odpowiedź:
   Efektywna w sensie Pareto wielkość produkcji odpowiada warunkowi
   $$p(y) = MC(y)$$
   czyli
   $$12 - y = 2y \qquad \Longrightarrow \qquad y^P = 4.$$

   (c) Policz i pokaż pustą stratę dobrobytu.

   Odpowiedź:
   Pusta strata społeczna to różnica nawyżek konsumenta i producenta między tymi dwoma alokacjami.



Wielkość pustej straty to pole trójkąta

$$Strata = \frac{1}{2}(9-6)\cdot(4-3) = \frac{3}{2}$$

(d) Przepuśćmy, że monopolista może doskonale dyskryminować cenowo (sprzedawać każdy produkt po jego cenie granicznej). Ile wynosi produkcja i strata pusta?
Odpowiedź:

Produkcja wynosi 4 a pusta strata społeczna wyniesie 0.