Pytanie 1
Funkcja produkcji jest w postaci

$$F(K, L, H) = K^\alpha L^\beta H^\gamma$$

(a) Dla $\gamma = 0$ i $\alpha + \beta = 1$ funkcja ma formę

$$F(K, L, H) = K^\alpha L^{1-\alpha}.$$

Przychody ze skali są dane przez wyrażenie

$$F(cK, cL, cH) = (cK)^\alpha (cL)^{1-\alpha} = c^\alpha K^\alpha c^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = cK^\alpha L^{1-\alpha} = cF(K, L, H)$$

czyli są stałe.

(b) Dla $\gamma > 0$ i $\beta = 1 - \alpha$

$$F(cK, cL, cH) = (cK)^\alpha (cL)^{1-\alpha} (cH)^\gamma = c^{\alpha+(1-\alpha)+\gamma} K^\alpha L^{1-\alpha} H^\gamma = c^{1+\gamma} K^\alpha L^{1-\alpha} H^\gamma$$

czyli są rosnące.

(c) Dla $\alpha + \beta + \gamma < 1$

$$F(cK, cL, cH) = (cK)^\alpha (cL)^\beta (cH)^\gamma = c^{\alpha+\beta+\gamma} K^\alpha L^\beta H^\gamma < cK^\alpha L^\beta H^\gamma$$

czyli są malejące.

(d) Dla $H = \underline{H}$ i $D = \underline{H}^\gamma$ otrzymujemy funkcję

$$F(K, L) = DK^\alpha L^\beta$$

Przyjmując $\beta = 1 - \alpha$ i $0 < \alpha < 1$ intensywna postać funkcji jest dana przez

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{DK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = D\left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = Dk^\alpha.$$

(e) Funkcja $f(k)$ ma malejące przychody ze skali ponieważ

$$f(ck) = D(ck)^\alpha = c^\alpha Dk^\alpha < cDk^\alpha = cf(k).$$

(f) Przebieg/zachowanie krańcowej produktywności $f(k)$ jest dane przez $f''(k)$:

$$f''(k) = (\alpha k^{\alpha-1})' = \alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0.$$

Ponieważ $f''(k) < 0$ to krańcowa produktywność jest malejąca.

Pytanie 2
Funkcja produkcji jest w postaci

$$F(K,H) = AK^{\alpha}H$$

Dla $H = K^{1-\alpha}$ funkcja staje się

$$F(K,H) = AK^{\alpha}K^{1-\alpha} = AK$$

(a) Postać intensywna

$$f(k) = \frac{F(K)}{L} = Ak.$$

(b) Funkcja $f(k)$ ma stałe przychody skali

$$f(ck) = Ack = cAk = cf(k).$$

(c) Krańcowa produktywność jest dana przez

$$f'(k) = (Ak)' = A.$$

Ponieważ $f''(k) = 0$ to $f(k)$ nie ma malejącej krańcowej produktywności.

Pytanie 3
Funkcja produkcji jest dana przez

$$F(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

dla $0 < \alpha < 1$.

(a) Funkcja w postaci intensywnej

$$f(k) = k^{\alpha}, \qquad k = \frac{K}{L}.$$

(b) Warunek stanu ustalonego (przy braku postępu technologicznego i wzrostu populacji) to

$$\Delta k = sf(k) - \delta k = sk^{\alpha} - \delta k = 0$$

(c) W stanie ustalonym

$$\begin{aligned} sk^{\alpha} &= \delta k \\ k^{1-\alpha} &= \frac{s}{\delta} \\ \bar{k} &= \left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

(d) W stanie ustalonym,

$$\bar{y} = f(\bar{k}) = \bar{k}^{\alpha} = \left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

i

$$\bar{Y} = \bar{y}L = \left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L$$

(e) Ponieważ $c = (1-s)y$ i $C = (1-s)Y$ to

$$\bar{c} = (1-s)\bar{y} = (1-s)\left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

i

$$\bar{C} = (1-s)Y = (1-s)\left[\frac{s}{\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L$$

Pytanie 4
W kraju $\frac{K}{Y} = 2$, brak postępu technologicznego i $n = 0\%$ (L jest stałe). W stanie ustalonym

$$\Delta k = 0 \quad \Rightarrow \quad sf(k) = \delta k$$

Zatem

$$\begin{aligned} sf(k) &= \delta k \\ s &= \delta \frac{k}{f(k)} = \delta \frac{K/L}{Y/L} = \delta \frac{K}{Y} \\ s &= 2\delta = 2 \cdot 0.05 = 0.1 \end{aligned}$$

Stopa oszczędności musi wynieść 10%.

Pytanie 5
Funkcja produkcji jest $Y = \sqrt{KL}$ czyli $f(k) = \sqrt{k}$. Zgodnie ze złota regułą

$$MPK = \delta$$

(a) Poziom kapitału w złotej regule jest równy

$$\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad k^{ZR} = (2 \cdot 0.1)^{-2} = 25$$

(b) Zgodnie z definicja złotej reguły, konsumpcja jest największa gdy $k = k^{ZR}$. Czyli zgodnie z warunkiem stanu ustalonego

$$sf(k) = \delta k$$

możemy obliczyć s jako

$$s = \delta \frac{k^{ZR}}{\sqrt{k^{ZG}}} = 0.1 \frac{25}{5} = 0.5$$

(c) Ponieważ s dla złotej reguły wynosi 50%, jeżeli stopa oszczędności wynosi 20% to gospodarka jest dynamicznie efektywna.

Pytanie 6
Korzystając z szeregu Taylora możemy przybliżyć funkcję $f : R \to R$ różniczkowalną $(n+1)$ razy w punkcie x_0 wyrażeniem

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n(x)$$

gdzie $R_n(x)$ jest $n-$tą resztą dla funkcji f w punkcie x_0.

(a) Korzytając z szeregu Taylora pierszego rzędu dla funkcji $\ln(1 + x)$ w punkcie $x_0 = 0$ otrzymujemy

$$\ln(1 + x) \approx \ln(1 + 0) + \frac{1}{1+0}x = x.$$

To przybliżenie jest zadowalające dla małych wartości x.

(b) Funkcja produkcji

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

i $0 < \alpha < 1$. Tempo wzrostu Y możemy policzyć jako

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}}{AK_{t-1}^{\alpha}L_{t-1}^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right)^{\alpha}\left(\frac{L_t}{L_{t-1}}\right)^{1-\alpha}$$

lub

$$1 + g_Y = (1 + g_K)^{\alpha}(1 + g_L)^{1-\alpha}$$

gdzie $g_x = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$ i $\frac{x_t}{x_{t-1}} = 1 + g_x$.
Korzystając z wyniku powyżej

$$g_Y \approx \ln(1+g_Y) = \ln\left((1 + g_K)^{\alpha}(1 + g_L)^{1-\alpha}\right) = \alpha\ln(1+g_K)+(1-\alpha)\ln(1+g_L) \approx \alpha g_K+(1-\alpha)g_L.$$

Alternatywnie, możemy policzyć tempo wzrosty Y jako $\frac{dY}{dt}/Y$. Korzystając z definicji Y mamy

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} &= \frac{d(AK^{\alpha}L^{1-\alpha})}{dt} = \frac{dA}{dt}K^{\alpha}L^{1-\alpha} + \frac{dK}{dt}\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + \frac{dL}{dt}(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} \\
&= \frac{\frac{dK}{dt}}{K}\alpha AK^{\alpha}L^{1-\alpha} + \frac{\frac{dL}{dt}}{L}(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\
\frac{\frac{dY}{dt}}{Y} &= \alpha\frac{\frac{dK}{dt}}{K} + (1-\alpha)\frac{\frac{dL}{dt}}{L} \\
g_Y &= \alpha g_K + (1-\alpha)g_L.
\end{aligned}$$

Pytanie 7
W kraju $\frac{K}{L} = 3$ i tempo wzrostu L wynosi $n = 2\%$.

(a),(b),(c) Ponieważ na ścieżce zrównoważonego wzrostu (przy braku postępu technologicznego) $k = \frac{K}{L}$ jest stałe, to znaczy, że K też musi rosnąc w tempie 2%. Ponieważ także $f(k) = y = \frac{Y}{L}$ jest stałe to $Y = F(K, L)$ również rośnie w tempie 2%. Ponieaż tempo wrostu L jest równe tempie wzrostu populacji to PKB *per capita* nie rośnie. Ten wynik nie zależy ani od stopy oszczędności (s)ani od stop deprecjacji (δ). s i δ wpływają na poziom PKB *per capita* lecz nie na tempo wzrostu.