

Ćwiczenia 2, Makroekonomia II, Zima 2022/2023

1. (Funkcja produkcji Cobba - Douglasa)

Funkcja Cobba-Douglasa jest w postaci

$$F(K,L,H) = K^\alpha L^\beta H^\gamma$$

Mówimy, że funkcja ma przychody ze skali, które są

- stałe, gdy $F(cK, cL, cH) = c F(K, L, H)$

- malejące, gdy $F(cK, cL, cH) < c F(K, L, H)$

- rosnące, gdy $F(cK, cL, cH) > c F(K, L, H)$

dla $c > 1$.

- Dla $\gamma=0$ i $\alpha+\beta=1$, jakie są przychody ze skali funkcji F ?
- Jakie są przychody ze skali funkcji F dla $\beta = 1-\alpha$ i $\gamma > 0$?
- Co powiemy o przychodach ze skali jeżeli $\alpha+\beta+\gamma < 1$?

Założmy teraz, że $H=\underline{H} > 0$ i zdefiniujmy stałą $d=\underline{H}^\gamma$ (F staje się funkcją dwóch zmiennych: K i L , tj. $F(K,L) = d K^\alpha L^\beta$). Przyjmijmy, że $0 < \alpha < 1$ i $\beta=1-\alpha$.

- Jak będzie wyglądać intensywna postać funkcji $F(K,L)$, $f(k) = F(K,L)/L$, gdzie $k = K/L$?
- Sprawdź czy funkcja $f(k)$ ma rosnące, malejące czy stałe przychody ze skali.
- Udowodnij, że funkcja produkcji $f(k)$ cechuje się malejącą krańcową produktywnością.

2. (Model AK)

Rozważmy funkcję produkcji Cobba-Douglasa

$$F(K,H) = A K^\alpha H,$$

w której $0 < \alpha < 1$ i A to pewna stała.

Przyjmijmy, że

$$H = K^{1-\alpha}$$

czyli H jest funkcją K .

- Zapisz funkcję $F(\cdot)$ w postaci intensywnej, czyli $f(k) = F(K,H)/L$.
- Sprawdź czy funkcja $f(k)$ ma rosnące, malejące czy stałe przychody ze skali.
- Sprawdź czy funkcja $f(k)$ cechuje się malejącą krańcową produktywnością.

3. (*Stan ustalony*)

Założmy, że funkcja produkcji jest w postaci

$$F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

gdzie $0 < \alpha < 1$.

- a) Zapisz funkcję produkcji w formie intensywnej jako funkcję $k=K/L$.
- b) Zakładając, że tempo wzrostu populacji jest równe zero, stopa oszczędności wynosi s , a stopa deprecjacji wynosi δ napisz warunek stanu ustalonego.
- c) Jaka jest ilość kapitału na zatrudnionego w stanie ustalonym?
- d) Jaka jest wielkość produkcji na zatrudnionego i całkowita wielkość produkcji w tej gospodarce w stanie ustalonym?
- e) Jaka jest całkowita wielkość konsumpcji gospodarstw domowych w stanie ustalonym.

4. (*Stan ustalony*) (Zadanie 3.4 BW)

Założmy, że iloraz K/Y jest stały i wynosi 2. Przyjmijmy, że liczba ludności się nie zmienia i że nie ma postępu technologicznego. Ile w stanie ustalonym wynosi relacja oszczędności-produkcja, która odpowiada deprecjacji równej 5% ?

5. (*Złota reguła*)

Założmy, że funkcja produkcji jest w postaci

$$Y = (KL)^{1/2}$$

Przyjmijmy, że liczba ludności się nie zmienia i że nie ma postępu technologicznego.

- a) Jeżeli stopa deprecjacji wynosi $\delta=0.1$, jaki będzie poziom kapitału na zatrudnionego zgodnego ze złotą regułą ?
- b) Ile musi wynieść stopa oszczędności, żeby konsumpcja *per capita* była jak największa?
- c) Czy jeżeli stopa oszczędności wynosi 20% to ta gospodarka jest dynamicznie efektywna czy dynamicznie nieefektywna?

6. (Mierzenie wzrostu)

- a) Korzystając z szeregu Taylora pokaż, że logarytm stopy wzrostu brutto $(1+x)$ równy jest (w przybliżeniu) stopie wzrostu netto (x) , czyli

$$\ln(1+x) \cong x$$

- b) Funkcja produkcji ma postać funkcji Cobba-Douglasa,

$$Y = F(K,L) = A K^\alpha L^{1-\alpha},$$

gdzie A to pewna stała, $0 < \alpha < 1$. Oblicz tempo wzrostu Y jako funkcję tempa wzrostu K i L .

(Wskazówka: podpunkt b) warto rozwiązać na dwa sposoby: (i) korzystając z podpunktu a; (ii) licząc stopę wzrostu jako $(dY/dt)/Y$)

7. (Tempo wzrostu PKB) (Zadanie 3.5 BW)

Przeanalizuj kraj, w którym nie ma postępu technologicznego, a iloraz K/L równa się 3. Liczba ludności rośnie w tempie 2% rocznie.

- a) Ile wynosi stopa zrównoważonego wzrostu PKB *per capita*, jeżeli stopa oszczędności jest równa 20%?
- b) Ile wynosi stopa zrównoważonego wzrostu PKB *per capita*, jeżeli stopa oszczędności jest równa 30%?
- c) Jeżeli stopa deprecjacji wynosi $\delta=6\%$, jak zmieni się odpowiedź w podpunktach a) i b) ?